微积分概论

引言

我感觉没啥好说的，微积分很多时候算就对了，纯粹是多做题的问题，历年题做完就差不多了。微积分的概念还挺具体的，所以大家学的时候可能更多是不会算某些特定的积分，但是技巧就几个，换元、分部积分、利用对称性，差不多就这些了。那么，我借助这篇文章想说什么呢？可能是我在学习微积分过程中发现的一些小技巧。

求极限

函数极限题能展开的一律泰勒展开，因为泰勒展开的每一项都是你需要关心的主要矛盾。如果你展开的结果不够计算所求的表达式，一定是因为展开的次数还不够高，而不是因为你没有选择洛必达。有些极限（或者导数值）在不会展开的情况下几乎不可能计算出来，例如上海交通大学某次微积分考试题，要求函数在 0 处的 13 阶导数

$$f(x)=\sqrt[3]{\sin(x^3)}, f^{(12)}(0)=?$$

对于符号恒定的数列，把它当成函数强行展开。如果是级数，看看它是哪个函数的展开。总之泰勒展开好，展开保平安。

函数构造

很多时候一些问题会涉及到巧妙的函数构造，但是实际上差不多就是解微分方程，比如说，当你看到条件 $y+y'>0$ ，想要考虑和 y 零点相关的信息时，你应该先解微分方程找到函数使得 $y+y'=0 \Rightarrow y=c\mathrm{e}^{-x} \Rightarrow \mathrm{e}^{x}y=c$，这样你就非常自然地把新的函数 $\mathrm{e}^{x}y$ 构造出来了。通常来讲，见到和函数、函数导数相关的不等式时，我们建议一律解微分方程处理，所以学习微分方程对微积分是很有好处的。

多元微积分的几个重要公式

> 你可能还看不懂其中的偏导数，你可以在网上查询定义或者跳过这一节

如果我和你说函数 f 连续可以推出

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$$

你会觉得稀疏平常，但是如果我说二元函数 f 连续可以推出沿着路径 γ

$$\int_\gamma (f_1(x,y)\mathrm{d}x+f_2(x,y)\mathrm{d}y)=f(B)-f(A)$$

这里 f_1,f_2 表示两个偏导数 A,B 分别是路径 γ 的起始点和终点，那么你可能会愣一下

而如果我说对于可微函数 $p=p(x,y),q=q(x,y)$ 和区域 Ω, 有（格林公式）

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\partial\Sigma}(p\mathrm{d}x+q\mathrm{d}y)$$

你可能又会觉得这是完全不同的东西了.

如果你再去查斯托克斯公式和高斯积分公式，你或许会感到有些混乱，这里我推荐学习梯度定理、散度定理和旋度定理，使用三个公式解决问题

$$\int_{\gamma} \vec{\nabla} f \cdot \mathrm{d}\vec{x} = f(b) - f(a)$$

$$\int_{\Sigma} \vec{\nabla} \times \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\partial\Sigma} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{x}$$

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{f} \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

如果你的注意力再集中一点，你甚至可以直接记

$$\int_{\Omega} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

学习建议

1. 多做题，历年题是可以做的，如果有精力可以看看吉米多维奇（但是我觉得那个题有点太多了）
2. 不要做来路不明的积分题
3. 卢兴江的数学研讨班是个好地方，确实对数学感兴趣的可以去听